Aula nº 5

Potencial Elétrico

1. Integral de linha do campo elétrico

Seja $\vec{E}$ um campo elétrico produzido por uma distribuição estática de cargas elétricas.

Estamos interessados em calcular a integral de linha de $\vec{E}$ dada como:

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad (1)$$

Por exemplo: Seja

$$\vec{E} = K\,(y\,\hat{x} + x\,\hat{y}) \qquad (2)$$

O caminho utilizado para calcular a integral de linha dada na Eq. (1) para a expressão particular do campo elétrico $\vec{E}$ dado pela Eq. (2) está mostrado na figura abaixo:

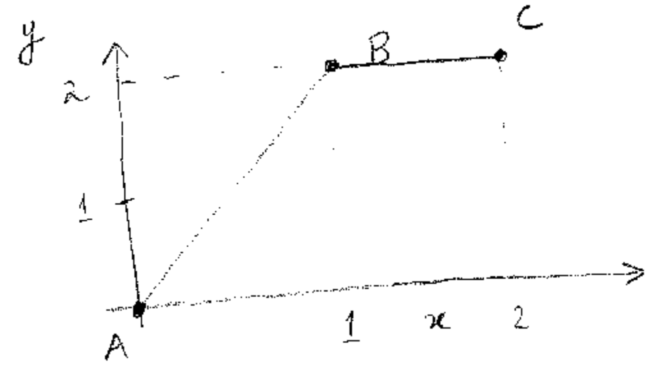

Fig. 1

O diferencial $\vec{dl}$ da integral da Eq. (1) é:

$$\vec{dl} = \hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy \qquad (3)$$

então

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = K\int_A^B (y\,dx + x\,dy) \qquad (4)$$

Podemos, para o caminho particular A para B mostrado na Fig. 1, escrever

$$y = 2x \qquad (5)$$

ou

$$dy = 2\,dx \qquad (6)$$

Com auxílio das Eqs. (5) e (6), reescrever a Eq. (4) como:

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = K\int_0^1 (2x\,dx + 2x\,dx) = 4K\int_0^1 x\,dx$$

$$= 4K\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 2K \qquad (7)$$

Suponha agora o caminho B para C:

$$y = 2 \tag{8}$$

$$dy = 0 \tag{9}$$

Logo a integral de caminho da Eq. (1) para o caminho B para C é:

$$\int_B^C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 2K \int_1^2 dx = 2K \tag{10}$$

A integral de linha total

$$\int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 4K \tag{11}$$

Vamos olhar agora para campo elétrico $\vec{E}$ produzido por uma carga puntiforme. Na Fig. 2 é mostrado as linhas de campo de $\vec{E}$ quando a carga é positiva

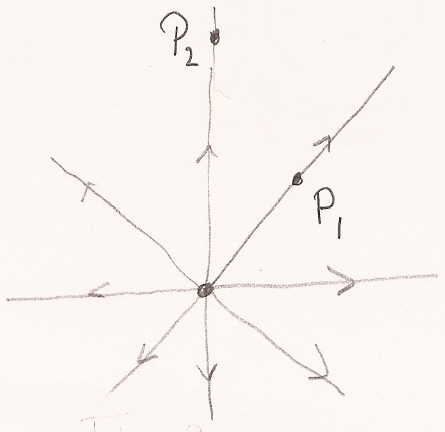

Fig. 2

A integral $\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ <u>independe</u> da particular trajetória de P_1 para P_2. Isso decorre essencialmente do caráter conservativo da força de Coulomb envolvido no problema.

ou seja, para $\vec{E}$ produzido por uma distribuição estática de carga. ($\vec{E}$ é um campo eletrostático), a

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{independe do caminho}$$

utilizada para ir de P_1 a P_2.

Como ilustração considere a trajetoria mostrada na Fig. 3

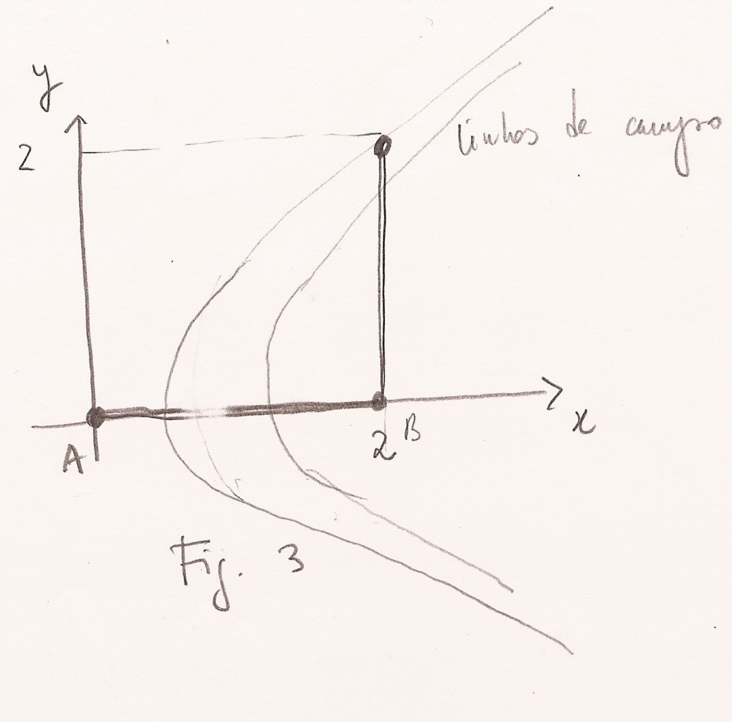

Fig. 3

vamos calcular a integral de linha

da Eq. (1) para o mesmo campo

elétrico $\vec{E}$ dado na Eq. (2).

A integral de caminho é

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{(0,0)}^{(2,0)} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{(2,0)}^{(2,2)} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Mas $\vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ na 1ª parte do caminho

$(A \rightarrow B)$.

No caminho $B \rightarrow C$

$x = 2$

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = 2K \int_0^2 dy' = 4K \quad !$$

2. Diferença de Potencial

Utilizando a propriedade que a integral de um campo eletrostático é independente de caminho, podemos definir φ_{21}

$$\varphi_{21} = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad (12)$$

φ_{21} = trabalho por unidade de carga realizado no deslocamento de uma carga positiva de P_1 até P_2 no campo $\vec{E}$. φ_{21} é a diferença de potencial entre P_1 e P_2.

A unidade de φ no sistema CGS é erg/ues = statvolt. 1 volt = 1/300 statvolt

Suponha que P_1 seja fixo numa posição de referência (onde $\varphi|_{P_1} = 0$). Isso significa que

$$\varphi = \varphi(x, y, z) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad (13)$$

onde (x, y, z) são coordenadas de P_2.

Ex: Considere o campo elétrico $\vec{E}$ dado na Eq. (2) e P_1 colocado na origem do sistema de coordenadas. O caminho é aquele mostrado na Fig. 3, página 6.

então

$$\varphi(x,y) = -\int_{(0,0)}^{(x,y)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{(0,0)}^{(x,0)} E_x dx' - \int_{(x,0)}^{(x,y)} E_y dy' \qquad (14)$$

O primeiro termo da Eq. (14) é nulo. O segundo termo é

$$-Kx\int_0^y dy' = -Kxy \qquad (15)$$

Isto é.

$$\varphi(x,y) = -Kxy \qquad (16)$$

Podemos generalizar a discussão anterior utilizando o Teorema Fundamental para Gradientes (ver Aula 3, página 10, Eq. (22)):

$$d\varphi = \vec{\nabla}\varphi(x,y,z) \cdot \vec{dl} \qquad (17)$$

que implica

$$\varphi = \int \nabla\varphi \cdot \vec{dl} \qquad (18)$$

com $\vec{dl} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz$. Estamos arbitrando que

$$\varphi\big|_{P_1} = 0$$

Comparando as Eqs. (18) e (13), se obtem:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \qquad (19)$$

O sinal negativo aparece porque $\vec{E}$ aponta de uma região de $\underline{\underline{\varphi > 0}}$ p/ $\underline{\underline{\varphi < 0}}$ e $\vec{\nabla}\varphi$ aponta na direção de φ crescente.

Ex:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}(Kxy) =$$

$$= -\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}(-Kxy) - \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}(-Kxy)$$

$$= +\hat{x}Ky + \hat{y}Kx$$

Note que na Eq. (19) poderiamos

desloca

$$\varphi(x,y,z) \longrightarrow \varphi(x,y,z) + \underline{cte} \qquad (20)$$

que produziria o mesmo campo elétrico $\vec{E}$.

3. Potencial de uma distribuição de carga.

Potencial de uma carga puntiforme num determinado ponto

$$\varphi = q/r \qquad (21)$$

r é a distancia da fonte ao ponto.